Mohamed El Founani
Lycée Ibn Maja

2$^{\text{ème}}$ année baccalauréat
Série Sciences Physiques

Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

Rappel sur le mouvement de rotation :

Dans les deux années précédentes, vous avez étudié deux cours importants *Mouvement de rotation autour d'un axe fixe* en 1$^{\text{ère}}$ année, et *Équilibre d'un solide en rotation autour d'un axe fixe*, on rappelle les points principaux dans ce paragraphe :

Définition :

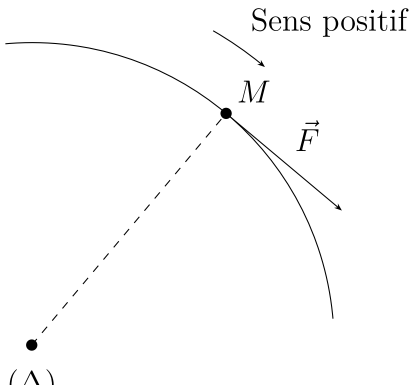
Un solide indéformable est en rotation autour d'un axe fixe si tous ses points décrivent des trajectoires circulaires centrés sur cet axe, ils ont la même vitesse angulaire, sauf les points situés sur l'axe.

Moment d'une force :

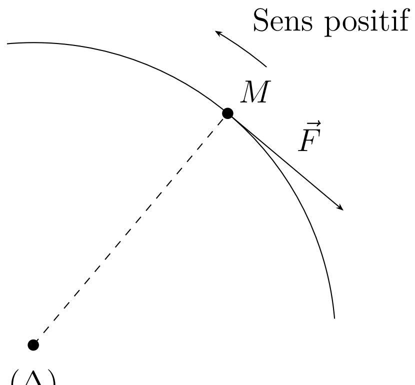
Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe fixe (Δ), est le produit de l'intensité de cette force par la distance qui sépare la droite d'action de la force et l'axe de rotation.

$$\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F.d$$

Le signe dépend du sens de rotation, si la force tourne le solide dans le sens positif alors le signe est positif, sinon le signe du $\mathscr{M}_\Delta$ est négatif.
Son unité est N.m .



$\mathscr{M}_\Delta = +F.d$



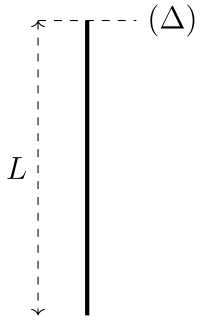
$\mathscr{M}_\Delta = -F.d$

Physiquement, c'est la grandeur qui traduit l'aptitude de cette force de faire tourner un système mécanique autour d'un axe.

Moment d'inertie :

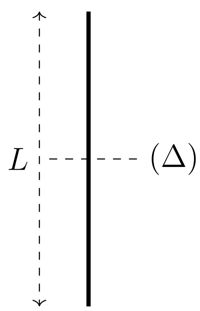
Le moment d'inertie d'un corps est l'analogue de la masse m, c'est une quantité physique caractérisant chaque corps, elle dépend de la masse, la longueur, la forme...
Son unité est Kg/m^2

Tige



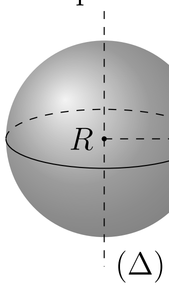
$$J_\Delta = \frac{1}{3}mL^2$$

Tige



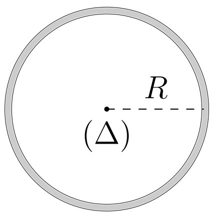
$$J_\Delta = \frac{1}{12}mL^2$$

Sphère



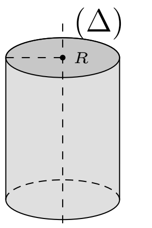
$$J_\Delta = \frac{2}{5}mr^2$$

Anneau



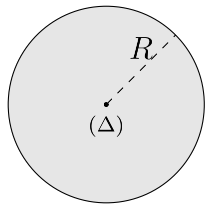
$$J_\Delta = mr^2$$

Cylindre



$$J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$$

Disque



$$J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$$

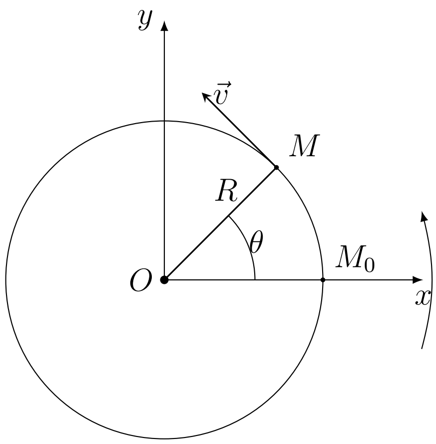
De l'abscisse angulaire à l'accélération angulaire :

L'abscisse angulaire :

On peut repérer la position du point appartenant à un solide par l'angle θ formé d'un vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ avec un axe une direction référentielle, le plus souvent l'axe $\overrightarrow{Ox}$, l'angle est donc $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Ox};\overrightarrow{OM}}\right)$, son unité est (rad).

Sa relation avec l'abscisse curviligne s est :

$$s = \widehat{OM} = R.\theta$$



La vitesse angulaire :

On définit la vitesse angulaire comme la dérivée de l'abscisse angulaire par rapport au temps :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Son unité rad.s^{-1} . La relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire est :

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R}$$

Car :

$$\begin{aligned} S = R\theta &\Longleftrightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R.\theta) \\ &\Longleftrightarrow v = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ &\Longleftrightarrow v = R\omega \end{aligned}$$

L'accélération angulaire :

On définit l'accélération angulaire comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps :

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

Son unité est rad/s^2. D'après la relation de Frenet on a :

$$\vec{a} = a_t\vec{u} + a_n\vec{n}$$

On a :

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}R\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} \\ &= R\ddot{\theta} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} a_n &= \frac{v^2}{R} \\ &= \frac{R^2\dot{\theta}^2}{R} \\ &= R\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$a_n = R\dot{\theta}^2 \qquad \text{et} \qquad a_t = R\ddot{\theta}$$

Mouvement de rotation :

Mouvement de rotation uniforme :

Le mouvement de rotation uniforme est un mouvement dans lequel l'accélération angulaire est nulle, et la vitesse est constante, son équation horaire :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

Où θ_0 est l'abscisse angulaire à l'origine des dates.

Mouvement de rotation uniformément varié :

Le mouvement de rotation varié est un mouvement dans lequel l'accélération est constante, son équation horaire est :

$$\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

$\dot{\theta}_0$ est la vitesse angulaire à l'origine des dates. L'équation de la vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

De cette équation on peut déduire que : $t = \dfrac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}$

En remplaçant dans l'équation horaire :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}\right)^2 + \dot{\theta}_0\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}\right) + \theta_0 \\ \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2}\ddot{\theta}\left(\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}}\right)^2 + \frac{2\dot{\theta}_0}{2}\frac{\dot{\theta} - \dot{\theta}_0}{\ddot{\theta}} \\ 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0) &= (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0)^2 + 2\dot{\theta}_0(\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) \\ &= \dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}_0\dot{\theta} + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta} - 2\dot{\theta}_0^2 \\ 2\ddot{\theta}(\theta - \theta_0) &= \dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 \end{aligned}$$

C'est la relation caractéristique du mouvement de rotation uniformément varié.

Le principe fondamental de la dynamique :

La somme des moments des forces extérieures qui s'exercent sur un solide en rotation autour d'un axe fixe (Δ) est égale au produit du moment d'inertie du solide et son accélération angulaire :

$$\sum \mathscr{M}_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

Remarques :
Si $\ddot{\theta} = 0$, alors le mouvement de rotation est uniforme autour de l'axe fixe (Δ), est le système étudié est en équilibre.
Si $\ddot{\theta} = \mathrm{C^{te}}$, alors le mouvement de rotation est uniformément varié autour de l'axe fixe (Δ).